Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 2 Enero - Junio 2012
ISSN: 2244 - 775X / Depósito legal pp 201102ZU3863

Generalización de los polinomios de Bernoulli de índice arbitrario complejo

Ana Isolina Prieto[1], Josefina Matera[1], Susana Salinas de Romero[1,2] y Marleny Fuenmayor[1]

[1]Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA)
Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia

[2]Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Rafael Urdaneta.
e-mail: aisolinap@hotmail.com, pinamatera@yahoo.es ,
susanaderomero@hotmail.com y mfuen14@yahoo.com

Recibido: 19-03-12 Aceptado: 11-05-12

Resumen

Este trabajo introduce una generalización de los polinomios de Bernoulli $B_\alpha(a,\ b)$ de índice arbitrario complejo.

Palabras clave: Polinomios de Bernoulli, Números de Bernoulli.

Generalization of Bernoulli polinomials of arbitrary complex index

Abstract

This paper introduces a generalization of Bernoulli polinomials $B_\alpha(a,\ b)$ of arbitrary complex index.

Key words: Bernoulli polynomials, Bernoulli numbers.

Introducción

Es bien conocido que los números clásicos de Bernoulli B_n pueden ser definidos por [1-3] como

$$\Phi(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n; \qquad |x| < 2\pi \tag{1}$$

O, más generalmente, los polinomios de Bernoulli $B_n(x)$, definidos por su función generadora [1-3]

$$\Phi(z,x) = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n; \qquad |z| < 2\pi \tag{2}$$

los polinomios de Bernoulli equivalentes son

$$B_n(x) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{ze^{xz}}{e^z-1}\right)\Bigg|_{z=0} \tag{3}$$

Los polinomios de Bernoulli juegan un rol fundamental en teoría combinatoria, cálculo de diferencia finita, análisis numérico, teoría de probabilidad; ellos prácticamente aparecen en cada campo de las matemáticas.

Es claro ver que $B_n = B_n(0)$ para los números de Bernoulli.

La definición usual de los polinomios de Bernoulli generalizados es

$$\frac{t^\sigma e^{ut}}{(e^t-1)^\sigma} = \sum_{n=o}^{\infty} B_n^\sigma(u)\frac{t^n}{n!}; \qquad |t| < 2\pi \tag{4}$$

Biani [2] introduce una nueva función $B_n(a, b)$ para $b > a > 0$ por

$$\Phi(x; a, b) = \frac{x}{b^x - a^x} = \sum_{n=o}^{\infty} B_n(a,b)\frac{x^n}{n!}; \qquad |x| < \frac{2\pi}{\ln b - \ln a} \tag{5}$$

Para más información acerca de los números y polinomios de Bernoulli, ver [3-5] y [6].

En este trabajo introducimos una generalización de los polinomios de Bernoulli $B_\alpha(a, b)$ de índice arbitrario complejo. Damos algunas relaciones y propiedades de la función $B_\alpha(a, b)$.

Relaciones de $B_\alpha(a, b)$

Introducimos una nueva función $B_\alpha(a, b)$ para $b > a > 0$, $\alpha \epsilon C$ por

$$\Phi(wz^\rho; a, b) = \frac{wz^\rho}{b^{wz^\rho} - a^{wz^\rho}} = \sum_{\alpha=o}^{\infty} B_a(a,b)\frac{(wz^\rho)^\alpha}{\alpha!}; \tag{6}$$

Aquí

$$\frac{wz^\rho}{b^{wz^\rho} - a^{wz^\rho}} = \frac{1}{a^{wz^\rho}}\frac{wz^\rho}{\left(\frac{b}{a}\right)^{wz^\rho} - 1} = \frac{1}{a^{wz^\rho}}\frac{wz^\rho}{e^{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^{wz^\rho}} - 1}$$

$$= \frac{1}{a^{wz^\rho}}\frac{wz^\rho}{e^{wz^\rho\,(\ln b - \ln a)} - 1}$$

De (1) tenemos

$$\frac{wz^{\rho}e^{-wz^{\rho}\ln a}}{e^{wz^{\rho}(\ln b-\ln a)}-1}=\left(\sum_{\alpha=o}^{\infty}\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{\alpha!}B_{\alpha}(wz^{\rho})^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=o}^{\infty}\frac{(\ln a)^{k}}{k!}(-1)^{k}(wz^{\rho})^{k}\right)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=o}^{j}(-1)^{j-i}\frac{B_i(\ln b-\ln a)^{i-1}}{i!\,(j-i)!}\right)(wz^{\rho})^{j}\ =\sum_{j=o}^{\infty}B_j\ \ a,b\ \ (wz^{\rho})^{j}$$

Donde,

$$B_j(a,b)=\sum_{i=o}^{j}(-1)^{j-i}(\ln b-\ln a)^{i-1}(\ln a)^{j-i}\binom{j}{i}B_i \tag{7}$$

De (6)

$$\frac{wz^{\rho}}{b^{wz^{\rho}}-a^{wz^{\rho}}}=\frac{1}{\ln b-\ln a}\sum_{\alpha=o}^{\infty}\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha}}{\alpha!}B_{\alpha}\left(\frac{\ln a}{\ln a-\ln b}\right)(wz^{\rho})^{\alpha}$$
$$=\sum_{\alpha=o}^{\infty}\frac{(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}}{\alpha!}B_{\alpha}\left(\frac{\ln a}{\ln a-\ln b}\right)(wz^{\rho})^{\alpha}; \tag{8}$$

$$B_{\alpha}(a,b)=(\ln b-\ln a)^{\alpha-1}B_{\alpha}\left(\frac{\ln a}{\ln a-\ln b}\right) \tag{9}$$

Si a = 1 y b = e en esta ecuación, resulta

$B_{\alpha}(1,\ e)=B_{\alpha}$ (10)

Donde α = n, entonces $B_n(1,e)=B_n$.

Si α = 0 en (9) se tiene [2(5), p. 429]

$$B_0\ \ a,b\ \ =(\ln b-\ln a)^{-1} \tag{11}$$

Además,

$$\frac{wz^{\rho}e^{-wz^{\rho}\ln a}}{e^{wz^{\rho}(\ln b-\ln a)}-1}=\frac{wz^{\rho}}{e^{wz^{\rho}\ln b}-e^{wz^{\rho}\ln a}}$$

$$= \frac{wz^\rho}{(e^{\ln b})^{wz^\rho} - (e^{\ln a})^{wz^\rho}} = \frac{wz^\rho}{(b)^{wz^\rho} - (a)^{wz^\rho}}$$

$$B_\alpha(-\ln a) = B_\alpha(a,b) \tag{12}$$

Algunas propiedades de la generalización de los polinomios de Bernoulli

Para números reales $b > a > 0$ y $wz^\rho \in \mathbb{R}$, se define

$$g(wz^\rho) = g(wz^\rho; a, b) = \begin{cases} \dfrac{b^{wz^\rho} - a^{wz^\rho}}{wz^\rho}; & wz^\rho \neq 0 \\ \ln b - \ln a; & wz^\rho = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Aquí

$$b^{wz^\rho} - a^{wz^\rho}\Phi(wz^\rho; a, b) = wz^\rho$$

y

$$g\ wz^\rho; a, b\ \ \Phi(wz^\rho; a, b) = 1 \tag{14}$$

De la fórmula (9), tenemos

$$B_\alpha(a,b) = -B_\alpha(b,a) \tag{15}$$

También usando (9), es fácil ver que

$$B_\alpha(a^n, b^n) = n^{\alpha-1}B_\alpha(a,b), \quad n \in \mathbb{R} \tag{16}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} B_\alpha(a^n, b^n) &= (\ln b^n - \ln a^n)^{\alpha-1}B_\alpha\left(\frac{\ln a^n}{\ln a^n - \ln b^n}\right) \\ &= (n\ln b - n\ln a)^{\alpha-1}B_\alpha\left(\frac{n\ln a}{n\ln a - n\ln b}\right) \\ &= (n)^{\alpha-1}(\ln b - \ln a)^{\alpha-1}B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right); \quad n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Usando $dB_\alpha(y)/dy = \alpha B_{\alpha-1}(y)$ y por cálculos directos, la fórmula (9) nos conduce a

$$\frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial a} = -\frac{(\alpha-1)}{a}(\ln b - \ln a)^{\alpha-2}. B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right) + (\ln b - \ln a)^{\alpha-1}. \alpha B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\left[\frac{\left(\frac{1}{a}\right)(\ln a - \ln b) - \ln a\left(\frac{1}{a}\right)}{(\ln a - \ln b)^2}\right]$$

$$\frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial a} = -\frac{(\alpha-1)}{a}(\ln b - \ln a)^{\alpha-2}. B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right) - \frac{\alpha \ln b}{a(\ln a - \ln b)^2}(\ln b - \ln a)^{\alpha-1}. B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)$$

$$\frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial a} = \frac{(\ln b - \ln a)^{\alpha-3}}{a}\left[(\alpha-1)(\ln a - \ln b) B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right) - \alpha\,(\ln b) B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\right], \tag{17}$$

Usando

$$\frac{dB_\alpha(y)}{dy} = \alpha B_{\alpha-1}\ y$$

y por cálculo directo, la fórmula (9) nos conduce a

$$\frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial b} = \frac{(\alpha-1)}{b}(\ln b - \ln a)^{\alpha-2}. B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)^{\alpha-1}$$

$$\times \alpha B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\left[\frac{\ln a}{b(\ln a - \ln b)^2}\right]$$

$$= \frac{(\ln b - \ln a)^{\alpha-3}}{b}\left[(\alpha-1)(\ln b - \ln a)\ . B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right) + \alpha \ln a\, B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\right], \tag{18}$$

Diferenciando $B_\alpha(a, b)$

$$
\begin{aligned}
B'_\alpha(a,b) &= \frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial a} + \frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial b} \\
&= \frac{(\ln b - \ln a)^{\alpha-3}}{ab}\Big[(b-a)(\ln a - \ln b)(\alpha-1)B_\alpha\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right) \\
&\quad + (a\ln a - b\ln b)\alpha B_{\alpha-1}\left(\frac{\ln a}{\ln a - \ln b}\right)\Big] \quad , \qquad (19)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B'_\alpha(a,b) &= \frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial a} + \frac{\partial B_\alpha(a,b)}{\partial b} = \alpha B_{\alpha-1}(a,b) + \alpha B_{\alpha-1}(a,b) \\
&= 2\alpha B_{\alpha-1}(a,b); \quad Re(\alpha) > 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B''_\alpha(a,b) &= 2\alpha\left(\frac{\partial B_{\alpha-1}(a,b)}{\partial a} + \frac{\partial B_{\alpha-1}(a,b)}{\partial b}\right) \\
&= 2\alpha\ \ (\alpha-1)B_{\alpha-2}(a,b) + (\alpha-1)B_{\alpha-2}(a,b) \\
&= 4\alpha(\alpha-1)B_{\alpha-2}(a,b); \quad Re(\alpha) > 3
\end{aligned}
$$

La *n*-ésima derivada de $B_\alpha(a, b)$ es

$$
B^n_\alpha(a,b) = 2^n\alpha\,(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)B_{\alpha-n}; \quad Re(\alpha) > n+1 \qquad (20)
$$

Agradecimiento

Las autoras agradecen al CONDES, de La Universidad del Zulia, el soporte financiero, y al profesor José Morón por su apoyo en la conversión digital del artículo.

Referencias bibliográficas

1. Apostol T. M., Introduction to Analytic Number Theory. Springer. New York, (1976).
2. Srivastava H.M. and Manocha M., A treatise on generating functions. Ellis Wood, New York, (1984).
3. Butzer P. L. Hanes M. and Leclerc M., Bernoulli numbers and polynomials of arbitrary complex index. Appl. Math. Lett. Vol. 5, No. 6, (1992), 83-88.
4. Bai-Ni Guo and Feng QI., Generalization of Bernoulli polynomials. Classroom notes. January, (2001).
5. Dattoli S. Lorenzuta and Cesarano C., Finite and generalized forms of Bernoulli polynomials. Rendiconti di Matematica. Serie VII, Volumen 19, Roma, (1999), 385-891.
6. Erdélyi A., Higher Transcendental Functions, Vol. I, (1953).
7. Hilfer, R., Applications of fractional calculus in Physics. World Scientific Publishing Company. Hong Kong (2000).