

Solitones topológicos: Cúmulos de energía

Ramón J. Cova

Facultad de Ingeniería, Universidad Rafael Urdaneta
Maracaibo, Venezuela

Departamento de Física, FEC
La Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela
rjcova@sdf.lonestar.org

Recibido: 25-03-11 Aceptado: 27-05-11

Resumen

Presentamos soluciones holomórficas caracterizadas por índices homotópicos en el modelo sigma CP^1 periódico, las cuales son cúmulos de energía conocidos como solitones topológicos. Estudiamos algunos aspectos de estabilidad y dispersión para el caso de dos solitones.

Palabras clave: solitón, dispersión, modelo CP^1

Topological solitons: Lumps of energy

Abstract

We present holomorphic solutions characterised by homotopic indices in the periodic CP^1 sigma model, solutions which are lumps of energy known as topological solitons. We study some stability and scattering aspects for the case of two solitons.

Key words: soliton, scattering, CP^1 model.

1. Introducción

Las interacciones de la naturaleza son descritas por teorías del tipo Yang-Mills [1], cuyo desarrollo ha producido, entre otras cosas, ecuaciones clásicas no lineales que poseen soluciones no singulares con energía finita localizada que se propagan con poco cambio de forma. Estos cúmulos de energía, conocidos como solitones, modelan complicados fenómenos que están allende toda descripción lineal. En las ecuaciones solitónicas, la dispersión y los efectos no lineales compensanse mutuamente, permitiendo al cúmulo viajero conservar en el tiempo su aspecto inicial.

Pese a no ser lineales, estas ecuaciones tienen la particularidad notable de que dos soluciones pueden combinarse para producir una tercera, generando interesantes propiedades de choque que convierten a los solitones en entidades atractivas para describir partículas elementales, asemejando objetos extendidos de energía concentrada como pudiera esperarse en el límite clásico de los hadrones. Además, los solitones aparecen en teorías que exhiben ruptura espontánea de la simetría, ingrediente básico de los modelos Yang-Mills.

La teoría de solitones amalgama varias ramas de la matemática, v.gr., geometría diferencial, topología, teoría de grupos, análisis complejo, y su aplicación no se limita a física de partículas sino que se extiende a materia condensada, hidrodinámica, óptica, etc. En biofísica se observan solitones en la molécula de ADN y en la dinámica de proteínas [2]. Y en teoría de comunicaciones se estudia la transmisión de señales ópticas a lo largo de distancias virtualmente ilimitadas empleando pulsos solitónicos de propagación vía fibras ópticas.

La mayoría de los modelos integrables están en (1+1) dimensiones (coordinada espacial, 1 temporal), como los sistemas KdV y seno-Gordon. En (2+1) dimensiones se conocen muy pocos modelos integrables y ninguno de ellos es relativísticamente invariante. La mayoría de las soluciones explícitas en (2+1) se limitan al caso estático y las obtenidas por transformaciones de Lorentz, así que para estudiar su dinámica se utilizan simulaciones numéricas.

Las propiedades de los solitones no integrables están íntimamente relacionadas con la topología del espacio de los campos de calibre Yang-Mills. La topología explica importantes aspectos de los solitones sin necesidad de conocer exactamente su expresión analítica; aparecen constantes de movimiento de origen topológico (no relacionadas con el teorema Noether) llamadas cargas topológicas. Éstas tienen una interpretación física natural si imaginamos que los solitones son partículas subatómicas cuyas cargas topológicas son constantes de movimiento.

Esta idea ha sido implementada exitosamente en el modelo Skyrme [3] de física nuclear. Sus solitones (skyrmiones) representan nucleones clásicos cuyo número bariónico es la carga topológica.

El sistema Skyrme pertenece a la familia de modelos no lineales conocidos como quirales o sigma [4]. Ellos abundan y se les estudia mucho en dos dimensiones espaciales, donde tienen importantes propiedades en común con las teorías Yang-Mills, v.gr., topología no trivial, invariancia conforme, libertad asintótica etc. El estudio de los modelos sigma permite obtener información sobre la teoría cuántica de campos Yang-Mills en (3+1) partiendo de las soluciones clásicas las ecuaciones de quirales más sencillas en bajas dimensiones. Un ejemplo son los vórtices, solitones relevantes en el modelo de cuerdas [5] de física de partículas y en la superconductividad de Ginzburg-Landau [6]. También destaca el imán ferromagnético de Heisenberg de mecánica estadística, descrito por el modelo planar O(3) (equivalente al modelo CP¹ que veremos en la sección siguiente). Mencionemos finalmente que los modelos sigma también son una sólida industria de investigación en matemática pura, las aplicaciones armónicas.

En el presente trabajo analizamos ciertas propiedades de estabilidad y dispersión de solitones en la teoría clásica del modelo sigma CP¹ periódico.

2. Modelo Sigma

Es una teoría no lineal de campos escalares que toman valores en una variedad de Riemann \mathcal{M} de dimensión m . Se trabaja en el espacio-tiempo de Minkowski de (D+1) dimensiones con tensor métrico fundamental $g_{uv} = \text{diag}(+1, -1, \dots, -1)$. Las ecuaciones de campo se obtienen de la densidad lagrangiana invariante de Lorentz.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \eta_{ij}(u) \partial_v u^i \partial^v u^j, \quad (1)$$

Donde $u^j \equiv u^j(x^\nu)$, $j = 1, 2, \dots, m$ y η_{ij} son las coordenadas y el tensor métrico en \mathcal{M} , respectivamente. Los índices griegos valen $0, 1, 2, \dots, D$ e indican coordenadas espacio-tiempo x^ν ; índices repetidos señalan sumatoria.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^j} = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^j, \alpha} \right) [u^j, \alpha \equiv \partial_\alpha u^j]$$

hallamos las ecuaciones de campo

$$\partial_\nu \partial^\nu u^j + \Gamma_{ks}^j \partial_\nu u^k \partial^\nu u^s = 0, (2)$$

Siendo Γ_{ks}^j los símbolos de Cristoffel de segunda especie:

$$\Gamma_{ks}^j = \frac{1}{2} \eta^{jr} (\eta_{sr,k} + \eta_{kr,s} - \eta_{ks,r}).$$

Nótese que el término de interacción de este modelo surge de modo puramente geométrico, conectado con la curvatura del espacio no-lineal \mathcal{M} .

Sea \mathcal{M} una variedad del tipo Kahler, *i.e.*, una variedad compleja que admite la métrica hermítica

$$ds^2 = \eta_{ij} du^i d\bar{u}^j$$

Tal que la forma diferencial

$$\omega = (1/2)\eta_{ij} du^i \wedge d\bar{u}^j$$

es cerrada [$d\omega = 0$]. El sub-índice de η con la barra se refiere a la coordenada \bar{u} , compleja conjugada de u . La condición $d\omega = 0$ implica que los símbolos de Cristoffel mixtos son cero, quedando (2) simplificada a

$$\partial_\nu \partial^\nu u^j + \eta^{j\bar{r}} \eta_{k\bar{r},s} \partial_\nu u^k \partial^\nu u^s = 0 (3)$$

3. Modelo CP^1 en (2+1)-D

Nos interesan modelos donde los campos toman valores en el espacio complejo proyectivo $\mathcal{M} = CP^n$ [7]. El más sencillo es CP^1 , que consiste en un campo complejo $u^1(x^\nu) = W$ y su conjugado $u^2(x^\nu) = \bar{W}$; $x^\nu = (x^0, x^1, x^2) = (t, x, y)$.

Escogiendo

$$\eta_{12} = \eta_{21} = 4(1 + W\bar{W})^{-2}, \eta_{11} = \eta_{22} = 0,$$

Las expresiones (1) y (3) se reducen a

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\nu W \partial^\nu \bar{W}}{(1 + |W|^2)^2} [|W|^2 = W\bar{W}], (4)$$

$$\partial_\nu \partial^\nu W - \frac{2\bar{W}}{1 + |W|^2} \partial_\nu W \partial^\nu W = 0. (5)$$

No se han encontrado soluciones analíticas de esta ecuación diferencial excepto para el caso estático (2+0), cuya evolución se estudia con simulaciones numéricas. Introduciendo coordenadas $z = x + iy$ y su compleja conjugada \bar{z} en el plano, la ecuación (5) independiente del tiempo adopta la apariencia

$$\partial_{z\bar{z}} W - \frac{2\bar{W}}{|W|^2 + 1} \partial_z W \partial_{\bar{z}} W = 0. (6)$$

Impondremos condiciones de contorno periódica, lo cual equivale a definir el sistema en un toro plano T_2 . Así tenemos, $\forall t$,

$$W[z + (m + in)L] = W(z), z \in T_2 \quad (7)$$

Con $m, n = 0, 1, 2, \dots$ y L el tamaño del toro.

Por lo tanto, los campos W serán entonces funciones elípticas representadas por aplicaciones armónicas $W: T_2 \mapsto S_2$, ya que el espacio CP^1 es isométrico a S_2 . Por geometría diferencial sabemos [8, 9] que mapeos continuos y no singulares de esta forma se dividen en clases de equivalencia homotópicas, cada una etiquetada por un número entero Q , la carga topológica (conocida como el grado de Brouwer en matemática pura). Esta magnitud es un invariante topológico del par de espacios T_2 y S_2 , pues una configuración perteneciente a una clase Q puede deformarse continuamente en otra configuración dentro de dicha clase solamente. Luego, concebimos la evolución temporal como una homotopía entre los estados inicial y final de W , donde Q se conserva durante el proceso.

Una fórmula útil para Q es

$$Q = \frac{1}{\pi} \int_{T_2} \frac{|\partial_z W|^2 - |\partial_{\bar{z}} W|^2}{(|W|^2 + 1)^2} d^2 x, \quad (8)$$

expresión que sale del modo usual desarrollando una forma diferencial de Kahler del espacio interno $\mathcal{M} = S_2$ en términos de las coordenadas de T_2 , a través del mapa cohomológico inducido [10].

Instantones

Las densidades de energía cinética K y potencias V se hallan ipso facto de (4) si recordamos que $\mathcal{L} = K - V$. La energía potencial, energía de las configuraciones estáticas, puede escribirse como $\int V$:

$$V = \int_{T_2} \frac{|\partial_z W|^2 - |\partial_{\bar{z}} W|^2}{(|W|^2 + 1)^2} d^2 x, \quad (9)$$

que combinada con (8) proporciona

$$V = \begin{cases} 2\pi Q + 4 \int_{T_2} \frac{|\partial_{\bar{z}} W|^2}{|W|^2 + 1} d^2 x \\ 2\pi[-Q] + 4 \int_{T_2} \frac{|\partial_z W|^2}{|W|^2 + 1} d^2 x \end{cases} \rightarrow V \geq 2\pi |Q|, \quad (10)$$

la cota Bogomolny. Los solitones estáticos o instantones [11] corresponden a la igualdad en (10): las soluciones con $Q > 0$ (instantones) y las soluciones con $Q < 0$ (anti-instantones) obedecen, respectivamente,

$$\partial_{\bar{z}} W = 0, \partial_z W = 0, \quad (11)$$

que reconocemos como las condiciones de Cauchy-Riemann para una función analítica $W = W(z)$ o $W = W(\bar{z})$. Ellas son mucho más manejables que la ecuación madre (6), y dicen los solitones CP^1 minimizan la energía potencial. No todas las soluciones de (11) satisfacen a (6) (el reverso sí se cumple) pero tales soluciones no son funciones holomórficas [12] y por ende no representan instantones.

Una particularidad del modelo toroidal es que no posee solitones de índice $|Q| = 1$. Podemos convencernos de esto observando que la función elíptica no trivial más simple es de orden dos. De la teoría de funciones meromórficas [13] sabemos que la suma de los residuos B_j , con respecto a los polos

situados en una celda fundamental, está dada por (supóngase que no hay polos en los bordes de la celda fundamental)

$$\sum_j B_j = \frac{1}{2i\pi} \oint_{FC} f(z) dz, \quad (12)$$

donde $f(z)$ es una función elíptica arbitraria. Tomando en cuenta que

$$\int_L^{L+iL} f(z) dz = - \int_{iL}^0 f(z) dz,$$

$$\int_{L+iL}^{iL} f(z) dz = - \int_0^L f(z) dz,$$

Vemos que la integral en (12) es cero. Si, por ejemplo, $f(z)$ solamente tiene un polo de orden uno, ocurrirá lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{B}{z - \rho} + \text{Parte regular} \\ &= \text{Parte regular [pues } B = 0] \\ &\neq \text{función elíptica.} \end{aligned}$$

Pero si el polo ρ de $f(z)$ es de orden mayor que uno, digamos dos, queda:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A}{(z - \rho)^2} + \frac{B}{z - \rho} + \text{Parte regular} \\ &= \frac{A}{(z - \rho)^2} + \text{Parte regular,} \end{aligned}$$

Función que es ciertamente elíptica. Concluimos que el orden de $f(z)$ debe ser mayor que 1. La ausencia de soluciones $|Q| = 1$ también puede entenderse en el contexto de la geometría diferencial: los mapas armónicos; $A \mapsto S_2$ (A es una superficie de Riemann orientable) poseen representantes holomórficos (Instantones) de cualquier orden que sea mayor que el *genus* de A [9]. Claramente, para $A = T_2$ el índice de Brouwer (carga topológica) de los mapeos ha de ser mayor que la unidad, ya que $\text{genus}(T_2)=1$.

Funciones elípticas

Es posible usar la función elíptica de Weierstrass \wp para describir los solitones periódicos. Por ejemplo, el campo $W = \lambda \wp(z - \alpha) + b$, $\lambda, \alpha, b \in \mathbb{Z}$ representa una configuración de dos instantones ($Q = 2$). En fracciones parciales

$$\wp(u) = u^{-2} - \sum_{-\infty}^{\infty} \{ [u - (m + in)L]^{-2} - [(m + in)L]^{-2} \}; \quad (13)$$

la suma es sobre los enteros m, n excluyendo la combinación $m = n = 0$.

Acá describiremos a W vía la función pseudo-elíptica de Weierstrass $\sigma(u)$:

$$W = \lambda \prod_{j=1}^k \frac{\sigma(z - c_j)}{\sigma(z - d_j)}, \sum_{j=1}^k c_j = \sum_{j=1}^k d_j, \quad (14)$$

donde la regla de selección entre los ceros c_j y polos d_j garantiza que W sea elíptica. El orden de la función, κ , es numéricamente igual a la carga topológica si $\kappa > 1$, en cuyo caso $|Q| = k$ da el número de solitones del sistema. El parámetro λ está relacionado con el tamaño de los solitones.

La serie de Laurent para σ en un toro cuadrado posee el aspecto conveniente

$$\sigma(u) = \sum_{j=0}^{\infty} D_j u^{4j+1}, D_j \in \mathfrak{R}, \quad (15)$$

donde los coeficientes D_j se calculan desarrollando $\sigma(u) = \int_0^u [\wp(u) - 1/v^2]$ y con la ayuda de (13).

4. Evolución numérica

Las configuraciones (14) sirven como condiciones iniciales para la evolución numérica en el tiempo de la ecuación (5), una vez asignada la velocidad inicial v via un boost de Lorentz o Galileo.

El problema de valor inicial queda definido completamente implementando la derivada de W con respecto al tiempo. Con la transformación

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow \gamma(a_1 + vt), a_2 \rightarrow \gamma(a_2 + vt) \\ b_1 &\rightarrow \gamma(b_1 + vt), b_2 \rightarrow \gamma(b_2 + vt) \end{aligned}$$

y evaluando $\partial_t W|_{t=0}$, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\sigma(z - a_1 - vt) \sigma(z - a_2 - vt)}{\sigma(z - b_1 - vt) \sigma(z - b_2 - vt)} \Big|_{t=0},$$

donde por simplicidad hemos utilizado $\gamma = 1$.

Empleamos el método de Runge-Kutta de cuarto orden y aproximamos las derivadas espaciales con diferencias finitas; para el laplaciano usamos el estándar de 9 puntos.

$$\nabla^2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}{6(dx)^2}$$

Con respecto a la serie (15), basta computarla hasta el sexto termino, pues los coeficientes D_j son muy pequeños para $j > 6$. Tenemos:

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 \\ D_1 &= -0,7878030 \\ D_2 &= -0,221654845 \\ D_3 &= 9,36193 \times 10^{-3} \\ D_4 &= 7,20830 \times 10^{-5} \\ D_5 &= 2,37710 \times 10^{-5} \end{aligned} \right\}$$

El modelo discretizado evoluciona en una red básica $n_x \times n_y = 200 \times 200$ con pasos especiales y temporales $\delta x = \delta y = 0,02$ y $\delta t = 0,005$, respectivamente. El tamaño del toro plano es $L = n_x \times \delta x = 4$, y los vértices de la celda fundamental están en

$$(0,0), (0, L), (L, L), (L, 0).$$

5. Cúmulos de energía

Limitándonos al caso de dos solitones, el campo (14) con $\kappa = 2$ y $\lambda = (1,0)$ es

$$W = \frac{\sigma(z - a_1) \sigma(z - a_2)}{\sigma(z - b_1) \sigma(z - b_2)} ; a_1 + a_2 = b_1 + b_2, (16)$$

donde tomaremos los valores complejos

$$a_1 = (0.77, 1.95), a_2 = (3.25, 1.95), b_1 = (1.32, 1.95), b_2 = (2.70, 1.95).$$

La distribución de densidad de energía estática [*el integrando de (9)*] de este estado se exhibe en la figura 1 ($t = 0$). Este tipo de grafica indica la evolución del valor máximo de la energía.

Usualmente los solitones son enviados a chocar en el centro de la red, pero aprovechando nuestro formato periódico haremos que choquen en los bordes de la celda fundamental, que de paso servirá para verificar que nuestro código numérico esté correcto. Empleando $v = (-1/5, 0)$ nuestra simulación numérica señala que al principio los cúmulos de energía se comprimen haciéndose delgados y puntiagudos ensanchándose luego un poco mientras se acerca. Chocan en el borde del cuadrado y momentáneamente se confunden en una estructura circular, momento en que el valor máximo E_{max} de la densidad de energía es mínimo. Al rato se separan y emergen perpendicularmente con respecto a la dirección inicial de movimiento, dispersándose a 90° . En este proceso, que se muestra en la figura 1, los cúmulos se dividen en mitades. Si doblamos los lados verticales de la figura haciéndolos coincidir, deformamos la cuadrícula en un cilindro y las mitades se juntan armoniosamente (si ahora pegamos los extremos del cilindro tenemos la forma familiar del toro). Con el pasar del tiempo los solitones se separan y se tornan cada vez más puntiagudos; para $t \approx 5$ su anchura ya es $\sim (dx)^2$ y el procedimiento numérico colapsa.

Lo anterior refleja la invariancia del modelo ante dilataciones: la solución (14) existe para λ arbitrario y la energía (9) no depende de dicha constante, por lo que el solitón puede cambiar de tamaño sin ningún costo. Cualquier perturbación introducida en el sistema en este caso por la discretización del modelo, hace que el solitón o se torne más alto y puntiagudo o se achique ensanchándose. Ésta es la conocida inestabilidad del modelo CP¹ en (2+1). La hemos visto en el modelo con condiciones de contorno estándar [14], versión definida en el plano complejo extendido donde $W: S_2 \mapsto S_2$. El mismo fenómeno de formación de singularidad era de esperar en T_2 . Afortunadamente, los solitones discretizados de nuestra simulación viven lo suficiente para exhibir su dispersión a $\pi / 2$.

Veamos ahora dos instatones inicialmente estacionados en una diagonal principal de la celda, como enseña el dibujo 3. Esta situación corresponde a

$$a_1 = (0.95, 0.75), a_2 = (3.05, 3.25); b_1 = (1.22, 1.95), b_2 = (2.78, 2.05).$$

Dirigidas hacia las esquinas en sentidos contrarios con $v = \frac{\sqrt{2}}{10}(1, 1)$, estas estructuras colisionan en la esquina $(0, 0) = (4, 4)$ y reaparecen en la diagonal $(0, 4) = (4, 0)$, indicando una dispersión de ángulo

recto. Lógicamente, todas las esquinas de la red periódica son el mismo punto. Más tarde la inestabilidad del modelo CP^1 puro se manifiesta y los cúmulos de energía crecen ilimitadamente hasta colapsar el procedimiento numérico, como muestra la curva “Puro” en la parte inferior derecha del dibujo 3, donde se ha graficado la evolución del pico E_{max} de la densidad de energía total ($\mathcal{K} + \mathcal{V}$).

Es importante destacar que la información de singularidad puede evitarse añadiendo términos extras al lagrangiano (4) [15]. Generalmente se añade un término tipo Skyrme que limita su crecimiento (ancho); el resultado es la estabilidad del cúmulo de energía. En parte inferior derecha del dibujo 3 también hemos incluido la curva “Skyrme”, en la cual vemos que E_{max} se estabiliza.

En el caso del toro, sin embargo, solamente se necesita el término Skyrme θ_1 para estabilizar a los solitones [16, 17]. El lagrangiano en este caso tiene el aspecto

$$\mathcal{L} = \frac{|W_t|^2 - 2|W_z|^2 - 2|W_{\bar{z}}|^2}{(1 + |W|^2)^2} - 8\theta_1 \frac{|W_z|^2 - |W_{\bar{z}}|^2}{(1 + |W|^2)^4} (|W_t|^2 - |W_z|^2 - |W_{\bar{z}}|^2). \quad (17)$$

Es preciso observar que el campo (14) es una solución (estática) exacta de la ecuación (6), pero el mismo es solamente una solución aproximada de las ecuaciones de campo derivadas de (17). Debido a que los valores de θ_1 siempre son pequeños ($\theta_1 = 1/2000$ para la gráfica 3) y entonces W es una buena aproximación.

**Figura 1: Máximo de la densidad de energía total asociada al campo (16).
Los solitones chocan en los bordes.**

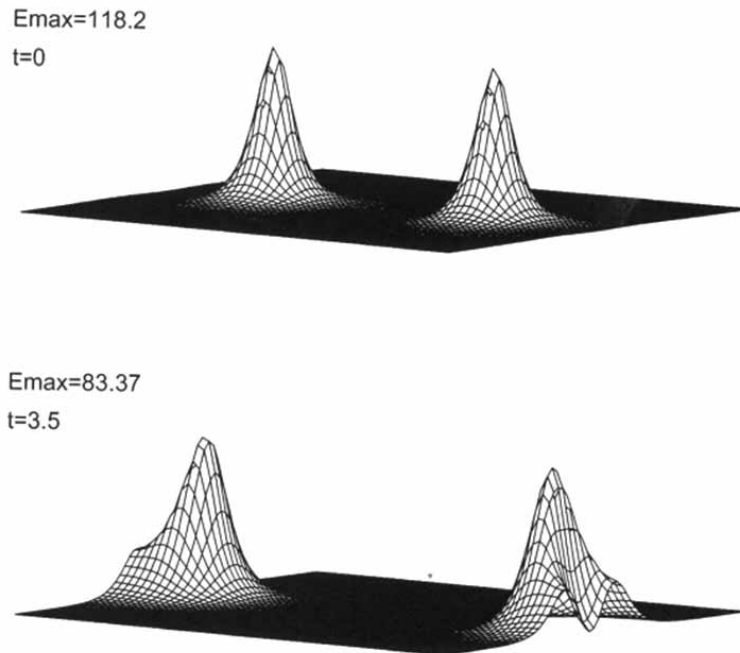


Figura 2: Los cúmulos de energía se dispersan a 90°. El pico de la energía crece sin límite y pronto los solitones colapsan.

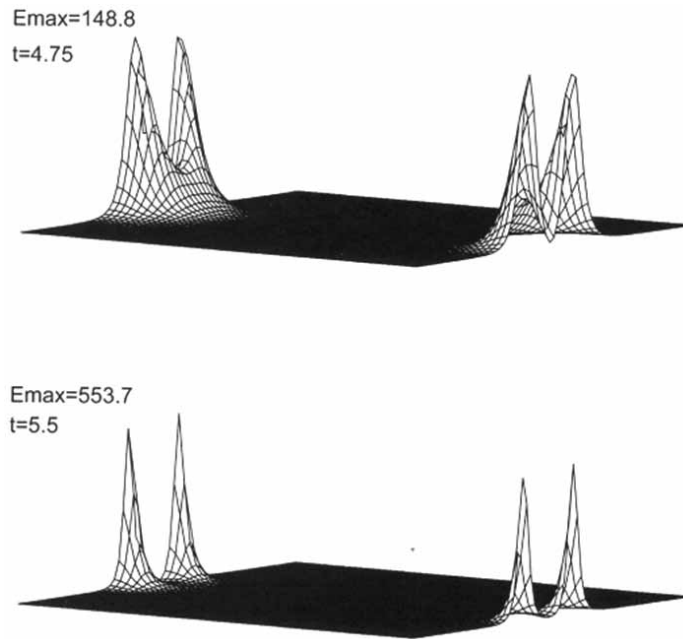
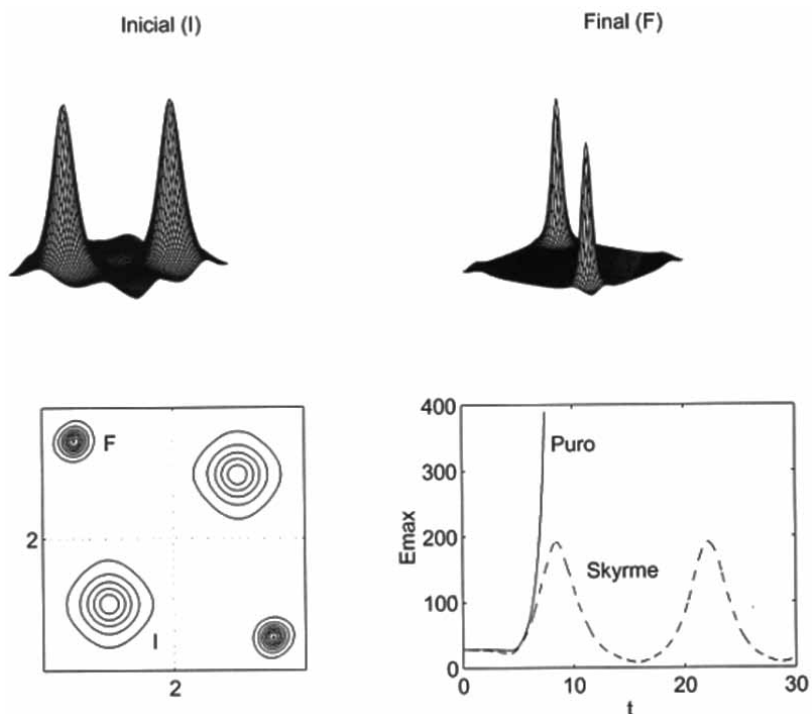


Figura 3: Las entidades solitónicas ubicadas en (I) chocan en las esquinas y emergen a lo largo de la diagonal perpendicular (F), indicando dispersión a $\pi/2$. La curva $E_{max}(t)$ "Puro" muestra la inestabilidad de los solitones, la cual se corrige en la versión Skyrme.



6. Conclusiones

Las entidades solitónicas son objetos muy importantes de investigación actual. En este artículo hemos estudiado uno de los modelos más simples, el CP^1 periódico en (2+1) dimensiones. Sus solitones W vienen dados por aplicaciones holomórficas $T_2 \mapsto S_2$ etiquetadas por índices topológicos. Tienen propiedades especiales, algunas de las cuales son cualitativamente distintas a la versión del modelo tradicional donde $W: S_2 \mapsto S_2$.

Una circunstancia interesante de la teoría toroidal es que no tiene instantones de carga topológica unidad, hecho que se explica porque las funciones elípticas que lo describen deben ser de orden > 1 .

El modelo es invariante ante cambios de escala, lo cual trae como consecuencia que los cúmulos de energía sean inestables ante cualquier perturbación del sistema. Sin embargo, esto puede corregirse introduciendo un término Skyrme al sistema.

Los cúmulos de energía se dispersan a $\pi/2$ (colisiones con parámetros de impacto cero) lo cual es una característica de los modelos sigma.

Agradecimiento

A la Universidad Rafael Urdaneta.

Referencias bibliográficas

1. Yang C. N. and Mills R. L., Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance, *Phys. Rev.* 96, 191 (1954).
2. Yakushevich L. V., Nonlinear dynamics of biopolymers: theoretical models, experimental data, *Quarterly Review Biophys.*, 26, 201-223 (1993).
3. Skyrme T. H., A unified field theory of mesons and baryons, *Nuclear Physics*, 31, 556-569 (1962).
4. Zakrzewski W. J. *Low Dimensional Sigma Models* Adam Hilger (1989).
5. Nielsen H. B. and Olesen P., Vortex-line models for dual strings, *Nuclear Physics*, B-61, 45-61 (1973).
6. Ginzburg V. L., Landau L. D. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20, 1064 (1950).
7. Nakahara M. *Geometry, topology and Physics*, IOP publishing, Bristol and Philadelphia (1990).
8. Eells J. and Lemaire L., on the construction of harmonic and holomorphic maps between surfaces, *Math. Ann.*, 252, 27-52 (1980).
9. Eells J. and Lemaire L., A report on harmonic maps, *Bull. London Soc.*, 10, 1-68 (1978).^[10]
10. Perelomov A. M., Group theoretical Interpretation of the Korteweg de Vries type equations, *Physica D4*, Volume 3, Issue 1, 45-61 (1981).
11. Belavin A. A. and Polyakov A. M., Metastable states of two-dimensional Isotropic ferromagnets, *JETP Letters*, 22, 245-246 (1975).
12. Lemaire L., Harmonic nonholomorphic maps from a surface to a sphere, *Proc. Amer. Math. Society*, 71, 299-304 (1978).
13. Goursat E. *Functions of a complex variable* Dover Publications (1916).

14. Leese R. A., Peyrard M. and Zakrzewski W., Soliton Scatterings in some relativistic models in (2+1) Dimensions, *J. Nonlinearity*, Volume 3, 773-808 (1990).
15. Cova R., Shyrmion Scattering in (2+1) dimensions, *Helvetica Physica Acta*, 68, 282-296 (1995).
16. Cova R. and Zakrzewski W., Soliton scattering in the O(3) model on a Taurus, *J. Nonlinearity*, Volumen 10, 1305-1318, september (1997).
17. Cova R., Solitones Topológicos II: modelo- σ CP¹, *Ciencia Vol. 16*, Número 4, 409-417 (2008).