

Problema inverso de la determinación del número de Nusselt en convección natural

Free convection Nusselt number determination as an inverse problem

*J. Zueco J. y F. Alhama L.

Dpto de Ing. Térmica y fluidos. Universidad Politécnica de Cartagena
Campus Muralla, 30203 Cartagena. España

*joaquin.zueco@upct.es

F. del Cerro V.

Facultad de Ciencias, Universidad de Murcia
30100 Murcia. España

Resumen

Este trabajo trata de la obtención del número Nusselt en convección libre para la transmisión de calor en una placa vertical, a la manera de un problema inverso, mediante el Método de Simulación por Redes. Los datos de entrada son una serie de temperaturas medidas en un punto de la placa a intervalos regulares de tiempo, estas temperaturas se obtienen modificando los resultados exactos del problema directo (que también se resuelve utilizando el mismo método) mediante la aplicación de un cierto error aleatorio. El modelo en red para la solución del problema inverso incluye un dispositivo eléctrico que se encarga de generar la función lineal a tramos que va a aproximar la dependencia del coeficiente de transmisión de calor con la temperatura. Los parámetros que definen los sucesivos tramos de la función (pendiente y longitud del tramo) se pueden cambiar mediante programación hasta hacer óptimo el funcional típico de este tipo de problemas. Se estudia la influencia del error aleatorio en la solución del problema comprobando que ésta se ajusta muy bien a la solución exacta por debajo de valores en torno al 1%. También se estudia la influencia del número de términos que se incluyen en el funcional.

Palabras claves: Problema inverso, método de redes, convección natural.

Abstract

This work deals with the Nusselt number determination in a vertical plate subject to free convection, as an inverse problem, by means of the Network Simulation Method. The input data of the problem is a set of temperature measurements at a point of the plate taken at regular time intervals. These temperatures are really obtained modifying the solution of the direct problem, for which the exact Nusselt number is used, applying a random error. The piece-wise continuous function that approaches the temperature dependence of the Nusselt number is generated by a special electrical device implemented in the network model. Parameter that defines the successive stretches of the function, the slope and the length of the stretch, may be changed by iteration to optimise the functional defined in this kind of problems. The influence of the random error values is studied being the solution close to the exact one for errors less than 1%. Influence of the number of the functional terms in the solution is also studied.

Key words: Inverse problem, network method, natural convection.

1 Introducción

Durante las dos últimas décadas los problemas inversos han tenido un interés creciente en prácticamente todas las ramas de la ciencia y la técnica: metalurgia,

ingeniería térmica y de materiales, fabricación, medicina, etc. Numerosos métodos y algoritmos han sido propuestos para la solución de este tipo de problemas (Stolz, 1960; Shumakov, 1957; y Beck y Col., 1985) se han desarrollado para resolver el problema inverso.

Dentro del campo de la conducción de calor surgen diferentes tipos de problemas inversos (IHCP) en función del parámetro o magnitud objeto de interés: determinación de las condiciones de contorno (flujos incidentes dependientes del tiempo), de las propiedades térmicas del medio (conductividad, calor específico, calor de cambio de estado), de las fuentes o sumideros interiores o de sus posiciones en el medio, de propiedades superficiales tales como la emisividad, etc.

Un problema de bastante interés en este campo es la estimación del coeficiente de convección, $h(T)$. Osman y Beck (Osman y Beck, 1990), que utilizan como medio una esfera unidimensional, y Maillet (Maillet y Col., 1991), para un cilindro bidimensional obtuvieron el coeficiente de convección en función de la temperatura, $h(T)$, de forma directa. Chantasiriwan (Chantasiriwan, 1999) evaluó primeramente las condiciones de contorno (temperaturas y flujos de calor) de una placa unidimensional y obtuvo $h(T)$ de estos datos. Oosthuizen y Naylord (Oosthuizen y Naylord, 1999) trabajaron la convección natural en una pared cilíndrica y la convección forzada sobre una pared cuadrada. Guzik y Nowarski (Guzik y Nowarski, 2001) determinaron $h(T)$ en un cilindro bidimensional usando el llamado método de filtración de mínimos cuadrados.

En este trabajo se determina el coeficiente de transferencia de calor en un proceso de convección libre, mediante el método de simulación por redes (MESIR). Se trata de un problema inverso de conducción térmica transitoria en un sólido (superficie extendida unidimensional); estando los extremos sometidos a condiciones de contorno de segunda y tercera clase, y considerando las características térmicas constantes. Los datos de entrada suelen ser un conjunto de temperaturas medidas experimentalmente en alguna zona accesible del medio. La posición del punto de medida, el número de medidas dentro de un intervalo de tiempo dado y el error con el que son tomadas son aspectos determinantes en la precisión de los resultados del problema inverso.

Las temperaturas de entrada se obtienen modificando sus valores exactos mediante un cierto error aleatorio. Estos resultados exactos, a su vez, son obtenidos de la solución del problema directo (DHCP) también mediante el MESIR. Este método numérico ha demostrado ser bastante eficaz para la solución de problemas directos e inversos (González-Fernández y Col., 1998; Alhama y Col., 2001; Zueco y Col., 2001). La precisión alcanzada con el mismo se reduce a valores más que aceptables en el campo de la ingeniería (0.5%) para un número de reticulaciones del orden de 50 en problemas 1-D, no lineales, siendo los tiempos de computación del orden de 1200 s.

La manipulación matemática necesaria en todos los métodos de solución de problemas inversos es prácticamente inexistente en el MESIR. Aquí sólo se necesita discretizar la variable espacial y obtener la ecuación en diferencias finitas, base para el diseño del modelo en red. Los algoritmos matemáticos para la

solución numérica se encuentran dentro del software de resolución de circuitos. Pspice (Pspice, 1994; Nagel, 1974) es el elegido en este trabajo.

2 Planteamiento del problema

El sistema físico bajo estudio es una placa infinita de espesor L , densidad ρ , conductividad térmica k y calor específico c_e , sometida a convección libre en una de sus caras, manteniendo la otra bajo condición adiabática (Fig. 1). El problema consiste en la estimación del número de Nusselt, número adimensional que cuantifica la convección libre, $N_u = h L/k$, donde h es el coeficiente de convección. Para ello, en primer lugar, se resuelve el problema directo (conociendo a priori N_u) obteniéndose una serie de medidas de temperaturas en $x=L$ en función del tiempo. Éstas, se modifican mediante un error aleatorio para simular datos experimentales que serán los de entrada del problema inverso cuya solución deberá reproducir el N_u inicialmente propuesto.

2.1 Problema directo

El modelo matemático está constituido por la ecuación de conducción, Ec (1), más las condiciones de contorno, Ecs. (2) y (3), y las iniciales, Ec.(4). Siendo x la variable posición, t el tiempo, T_a la temperatura de referencia para la convección, T_{ini} la temperatura inicial del medio, C_{te} una constante numérica y G_r y P_r los números de Grashof y Prandtl, estas ecuaciones son:

$$\rho c_e \partial T / \partial t - \partial / \partial x [k(T) \partial T / \partial x] = 0 \quad (1)$$

$$(\partial T / \partial x)_{(x=0,t)} = h(T) \Delta T = C_{te} (T_a - T_s)^{5/4} L^{-1/4},$$

Para $x=0$, $10^9 > G_r P_r > 10^4$ (2)

$$(\partial T / \partial x)_{(x=L,t)} = 0, \text{ Para } x=L \quad (3)$$

$$T_{(x,t=0)} = T_{ini} \quad (4)$$

2.2 Problema inverso de la conducción del calor, IHCP

El campo de temperaturas obtenido de la solución del problema directo, medido a intervalos de tiempo $t_j = t_1, t_2, \dots, t_m$, en $x=L$, se denomina $T_{DHCP}(x=L, t_j)$, con $1 < j < m$, siendo j el intervalo de tiempo y m el número total de medidas. Para conseguir el conjunto de temperaturas (medidas reales) $T_{IHCP}(x=L, t_j, \epsilon_j)$ es necesario aplicar un error aleatorio ϵ_j . Este conjunto de temperaturas, Ec. (5), se utiliza como dato de entrada del IHCP.

$$T_{IHCP}(x=L, t_j, \epsilon_j) = T_{DHCP}(x=L, t_j) + \epsilon_j \quad (5)$$

donde $\epsilon_j = T_{DHCP}(x=L, t_j) u_j$, siendo u_j un número proporcionado por un generador de números aleatorios.

Matemáticamente hablando la formulación del problema inverso (IHCP) implica la resolución de las Ecs. (1), (2), (3) y (4) con el conjunto $T_{IHCP}(x=L, t_j, \epsilon_j)$. Con esta información el objetivo es estimar el número Nusselt. En la Fig. 1 se muestra el esquema del problema.

El clásico funcional definido en este tipo de problemas, $F(z)$, que compara las temperaturas T_{IHCP} (medidas por el sensor) y $T_{inv}(x_f, t_j)$ (solución del problema inverso), se ha definido en la forma

$$F(z) = \sum_{j=n, n+1, n+2, \dots, n+r} [T_{inv}(x_f, t_j) - T_{IHCP}(x_f, t_j, \epsilon_j)]^2 \quad (6)$$

donde $z = 1, 2, \dots, Z$, identifica el tramo de estimación (siendo Z el número total de tramos), n ($1, 2, \dots, m$) es el valor asociado a la primera temperatura del tramo y r el número de temperaturas dentro del funcional.

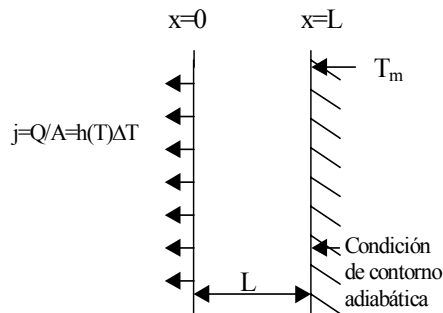


Fig. 1. Esquema del problema

3 Modelo en red

El primer paso es obtener, a partir del modelo matemático (ecuaciones en derivadas parciales), el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas con el tiempo como variable continua. Cualquiera de estas ecuaciones sirve para diseñar la celda elemental. La conexión entre celdas adyacentes sigue la disposición geométrica del medio. En las celdas de los extremos se implementan los componentes que simulan las condiciones de contorno, quedando configurado el modelo en red completo del problema al que únicamente habrá que añadir las condiciones iniciales.

El modelo en red para nuestro problema es sencillo y casi idéntico en ambos casos, DHCP y IHCP. La única diferencia es que para el IHCP hace falta un dispositivo especial, fuente de tensión lineal a tramos $V(t)$, que genera el valor del número N_u en función del tiempo. Dicho valor controlará el generador de corriente que simula la transferencia de calor por convección. En la Fig. 2 se muestra la forma de generar la tensión lineal a tramos.

$V(t)$ se genera mediante una rutina de programación en la cual es posible modificar la longitud de los tramos y su pendiente. Estos cambios se realizan continuamente hasta conseguir un valor mínimo del funcional de la Ec. (6). En este momento el valor de la pendiente del tramo de

estimación (N_{u,n,t_n}) queda establecido y se pasaría a la estimación de la pendiente del siguiente tramo.

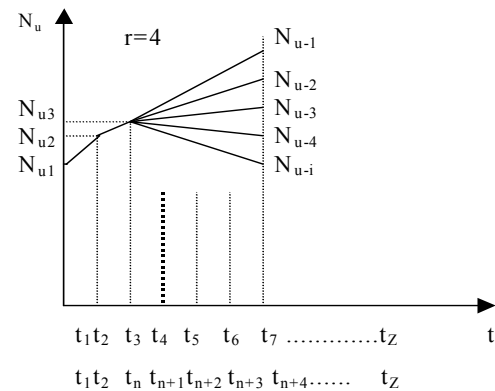


Fig. 2. Salida de la fuente lineal a tramos

La reticulación espacial de la Ec. (1) conduce a

$$\rho c_e (dT_i/dt) = (\Delta j_i/\Delta x) \quad (7)$$

En esta ecuación cada sumando se considera como un flujo térmico que entra o sale del nudo i , Fig. 3. De acuerdo con la nomenclatura mostrada en esta figura, y llamando,

$$j_{i-\Delta} = k [T_{i-\Delta} - T_i]/(\Delta x/2) \quad (8a)$$

$$j_{i+\Delta} = k [T_i - T_{i+\Delta}]/(\Delta x/2) \quad (8b)$$

$$j_{i,\gamma} = \rho c_e \Delta x (dT_i/dt) \quad (8c)$$

la Ec. (7) puede escribirse en la forma

$$j_{i-\Delta} - j_{i+\Delta} + j_{i,\gamma} = 0 \quad (9)$$

Esta última ecuación es una forma de la ley de Kirchoff para corrientes. A partir de las Ecs. (8a-c) puede diseñarse el modelo en red mediante la implementación de componentes eléctricos cuyas ecuaciones constitutivas sean formalmente análogas a las anteriores. Así, las Ecs. (8a) y (8b) definen sendas resistencias $R_{i-\Delta}$ y $R_{i+\Delta}$, dispuestas simétricamente en la celda, de valores

$$R_{i\pm\Delta} = \Delta x/(2k) \quad (10)$$

y la Ec. (8c) define un condensador C_i de valor

$$C_i = \rho c_e \Delta x \quad (11)$$

Con todo, el modelo en red completo de una celda elemental se muestra en la Fig 3.

La asociación en serie de N celdas, junto con la implementación de las condiciones de contorno, Ecs. (2 y 3) determinan el modelo en red de todo el medio, Fig. 4. La condición de convección libre, Ec. (2), requiere un generador de corriente controlado por las temperaturas

ambiente y de contorno, mientras que la condición adiabática, Ec. (3), se implementa con una resistencia de valor infinito.

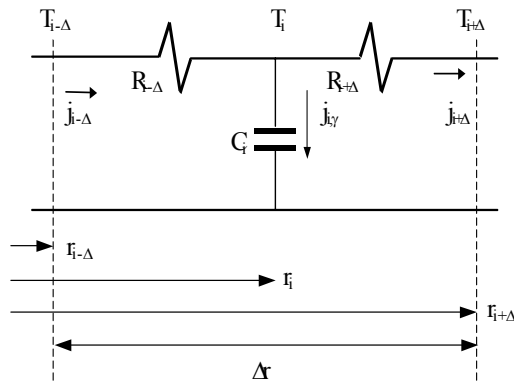


Fig. 3. Modelo en red de una celda

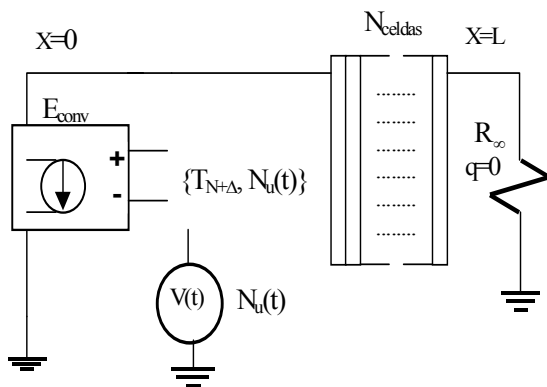


Fig. 4. Condiciones de contorno

En la Fig. 4 se muestra el esquema del modelo completo del IHCP. El elemento principal en la estimación es la fuente de tensión a tramos $V(t)$, con la que se obtiene la función de aproximación del número Nusselt buscado. La solución del problema proporciona $N_u(t)$, y de manera indirecta, la evolución del número Nusselt con la temperatura.

4 Resultados

Los valores numéricos son los siguientes: ρ (densidad) = 10 kg/m^3 , c_e (calor específico) = 1 J/kg K , L (longitud) = 1 m , T_{ini} (temperatura inicial) = $10 \text{ }^\circ\text{C}$, T_a (temperatura ambiente) = $0 \text{ }^\circ\text{C}$, k (conductividad térmica) = $1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, N_{celdas} (número de celdas) = 40 , m (número total de medidas) = 100 , intervalo de tiempo de medida 1 s y C_{te} (constante) = 1.41886 .

En la Fig. 5 se muestra la evolución del error relativo

con la temperatura, definido en la forma $e = (N_{u,exacto} - N_{u,estimado}) / N_{u,exacto}$, para un error aleatorio en la medida del $\pm 0.1\%$ y para distintos valores de r , $r=7$ (---), $r=6$ (o) y $r=5$ (Δ). En la Fig. 6 se representa la evolución del error relativo con la temperatura para un error en la medida superior ($\pm 2.5\%$) y para los mismos valores de r . Se observa que para el valor de $r=7$ se da el menor error relativo en ambos casos y como era de esperar los errores relativos son menores cuando el error en la medida disminuye.

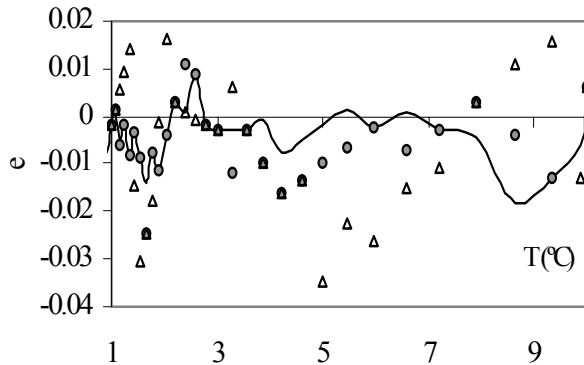


Fig. 5. Evolución del error relativo e (%) con la temperatura, $\epsilon = \pm 0.1\%$

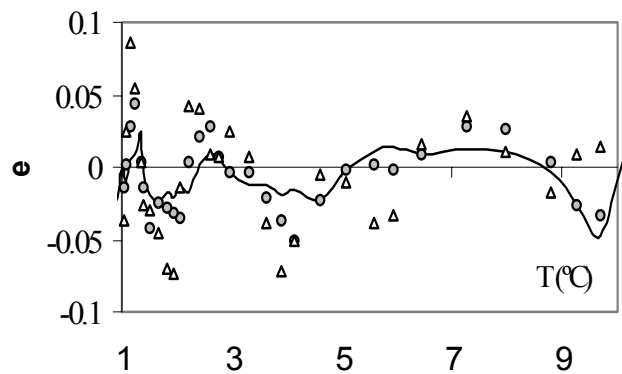


Fig. 6. Evolución del error relativo e (%) con la temperatura, $\epsilon = \pm 2.5\%$

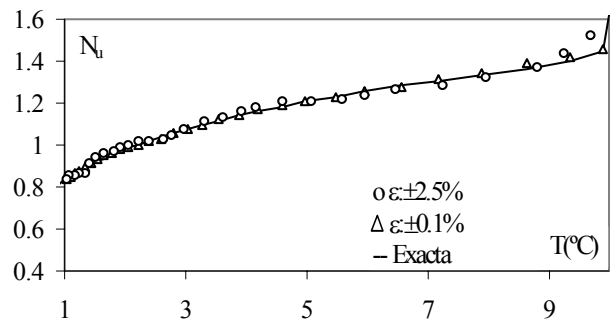


Fig. 7. Evolución del Número de Nusselt con la temperatura, $r=7$

En la Fig. 7 se muestra la dependencia del Número de Nusselt con la temperatura para la mejor aproximación de r ($r = 7$) y tres valores de error, $\varepsilon = \pm 0$, ± 0.1 y $\pm 2.5\%$.

5 Conclusiones

Se ha estudiado el problema inverso de la determinación del coeficiente de convección natural, $h(T)$, en un medio unidimensional sometido a condición adiabática en el otro extremo. Se trata de un problema no lineal cuya solución requiere del concurso de métodos numéricos.

La solución, tanto del problema directo como del inverso, se obtiene mediante el Método de Simulación por Redes. Los datos de entrada (un conjunto de temperaturas medidas a intervalos de tiempo regulares en una posición determinada del medio) se generan aplicando un error aleatorio a las temperaturas proporcionadas por la solución del problema directo.

El diseño del modelo en red es sencillo ya que son necesarios pocos dispositivos eléctricos. La implementación de una rutina de programación auxiliar permite la simulación, utilizando el software comercial Pspice, de forma continua y eficaz.

Las soluciones obtenidas para $N_u(t)$, en forma de función lineal a tramos, son bastante aproximadas a la solución exacta. Se ha mostrado la influencia en los resultados del error en la medida y del número de términos del funcional.

Referencias

Alhama F, Campo A, y González CF, 2000, Determination of the average convection coefficients in forced flows normal to solid cylinders via an inverse heat conduction problem and the network simulation method, Eurotherm Conference International, Germany.
Beck JV, Blackwell B and St. Clair CR Jr, 1985, Inverse heat conduction, ill-posed problems, Wiley-Interscience, New York.

Chantasiriwan S, 1999, Inverse heat conduction problem of determining time-dependent heat transfer coefficient, Int. Journal of Heat Mass Transfer, 42, 4275-4285.

González CF, Alhama F, López JF y Horno J, 1998, Application of the network method to heat conduction processes with polynomial and potential-exponentially varying thermal properties. Numer. Heat Transf. A, Appl. 33, 549-559.

Guzik A y Nowarski A, 2001, Estimation of the local heat transfer coefficients during film boiling for selected cooling fluids, Eurotherm- Seminar 68.

Maillet D, Degiovanni A y Pasquetti R, 1991, Inverse heat conduction applied to the measurement of heat transfer coefficient on a cylinder: Comparison between an analytical and a boundary element technique, Journal of heat transfer, 113, 549-557.

Nagel LW, 1977, SPICE, a Computer Program to Simulate Semiconductor Circuits. Chaps.4,5,6, Memo UCB/ERL M520, University of California, Berkeley, CA.

Oosthuizen P y Naylor D, 1999, A numerical evaluation of a simple procedure for using transient surface temperature measurements to determine local convective heat transfer rates, HTD, 364-4, Proceedings of the ASME.

Osman AM y Beck JV, 1990, Investigation of transient heat transfer coefficients in quenching experiments, Journal of Heat Transfer, 112, 843-848.

Pspice 6.0, 1994, Microsim Corporation, 20 Fairbanks, Irvine, California 92718.

Shumakov NV, 1957, A method for the experimental study of the process of heating a solid body, Soviet-Technical Physics (translated by American Institute of Physics), 2, 771.

Stolz G Jr, 1960, Numerical solution to an inverse problem of heat conduction for simple shape, J. Heat Transfer, 82, 20-26.

Zueco J, Alhama F, Garrido A y González CF, 2001, Determination of the specific heat versus temperature under natural convection boundary condition using the network simulation method, Eurotherm Seminar 68 Proceedings, 319-324.